

0. Lineare Algebra $x \in \mathbb{C}^n$

$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ | norm(x,p) in Matlab

$\|x\|_\infty = \max |x_i|$ | norm(x,inf)

$1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty: \|x\|_{p_2} \leq \|x\|_{p_1} \leq n^{(1/p_1 - 1/p_2)} \|x\|_{p_2}$

Spaltensummennorm $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$

Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

Def. SVD $A = U \Sigma V^H$ $\sum_{i=1}^n \sigma_i = \frac{1}{2} n(n+1)$

MATLAB: [U,D,V] = svd(A)

Def. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt strikt Zeilendominant falls $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ für alle $i=1,\dots,n$

Lemma: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ strikt Zeilendominant, dann ist A invertierbar.

Bew. Ang. A singular $\Rightarrow \exists x \neq 0: Ax=0$. Setze $k = \arg \max |x_i|$

so ist $x_k \neq 0$ und $\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j = 0 \Rightarrow a_{kk} x_k = -\sum_{j \neq k} a_{kj} x_j$

$\Rightarrow |a_{kk}| \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j \neq k} |a_{kj}|$ $\downarrow$ $\square$

Def. $\|\cdot\|_M$ auf $\mathbb{C}^{n \times n}$ heißt konsistent mit $\|\cdot\|_M$ und $\|\cdot\|_N$ falls

$\forall x \in \mathbb{C}^n \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}: \|Ax\|_M \leq \|A\|_M \|x\|_N$

Def. von $\|\cdot\|_M, \|\cdot\|_N$ induzierte Matrizen

$\|A\|_M = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_M}{\|x\|_N} = \sup_{\|x\|_N=1} \|Ax\|_M$

Def. $\|\cdot\|_M$ submultiplikativ $\|AB\|_M \leq \|A\|_M \|B\|_M$

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n^2(n+1)^2$

Satz: Spectral mapping Theorem. Sei q Polynom, es gilt

$\lambda(q(A)) = q(\lambda(A))$

Sherman-Morrison-Formel

$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}$

Trigonometrie

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)), \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$

Def. Frobeniusnorm auf $\mathbb{C}^{n \times n}$

$\|A\|_F = (\sum_{i,j} |a_{ij}|^2)^{1/2} = \text{spur}(AA^H)^{1/2}$

$\|\cdot\|_F$ ist konsistent mit $\|\cdot\|_2$ (Row, Column)

Für $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $\|B\|_F = 1$ aber $\|B\|_2 = \sqrt{n}$

Def. Spektrum von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\lambda(A) = \{ \lambda \mid \lambda \text{ EW von } A \}$

Ben. $\lambda(A^T) = \lambda(A)^*$, $\lambda(A^H) = \lambda(A)^*$

Def. Spektralradius $\rho(A) = \max_{\lambda \in \lambda(A)} |\lambda|$

Ungleichungen:

$\|x\| - \|y\| \leq \|x \pm y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$\forall x,y \geq 0: \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Für $x_i \geq 0: \sqrt[n]{\prod x_i} \leq \frac{1}{n} \sum x_i$

$\forall x > 1 \forall n \in \mathbb{N}: n x + 1 \leq (x+1)^n$

$(\frac{n}{2})^{n/2} \leq n! \leq n^n$

Matlab

`eye(n) % I_n`

`diag(u)`

`tril(A)`

`triu(A)`

`diag(A)`

`trace(A) % spur(A)`

`det(A)`

`C = A * B % Matrix Mult.`

`C = A .* B % komp. Mult.`

`B = inv(A)`

`B = A' % A^H`

`B = A.' % A^T`

`trace(A) % spur(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

`det(A)`

1. Computerarithmetik

Def: Gleitkommazahlen $F(\beta, t, e_{min}, e_{max})$ mit $\beta \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ (Basis), $t \in \mathbb{N}$ (Mantissenlänge), $e_{min} < 0 < e_{max}$, $e_{min}, e_{max} \in \mathbb{Z}$ (Exponentenbeschränken).
Dann ist $F = F(\beta, t, e_{min}, e_{max})$ definiert als

$$F := \left\{ \pm \beta^e \left(\frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t} \right) : d_1, \dots, d_t \in \{0, \dots, \beta-1\}, d_1 \neq 0, e \in \mathbb{Z} : e_{min} \leq e \leq e_{max} \right\} \cup \{0\}$$

Denormalisierte Zahlen $\hat{F}$ nicht alle = 0
 $\hat{F} := F \cup \left\{ \pm \beta^e \left(\frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t} \right) : d_2, \dots, d_t \in \{0, \dots, \beta-1\} \right\}$

IEEE-754: $\beta = 2$
Single: 32 bit, 23+1 b, 8 b, 10^{-38} , 10^{38}
Double: 64 bit, 52+1 b, 11 b, 10^{-308} , 10^{308}
in Single: $u = 2^{-24} \approx 5.96 \cdot 10^{-8}$
in Double: $u = 2^{-53} \approx 1.11 \cdot 10^{-16}$

$x_{min}(F) = \beta^{e_{min}-1}$
 $x_{max}(F) = \beta^{e_{max}}(1 - \beta^{-t})$
Lemma 1.6

Lemma 1.7: Sei $x \in F$ und $y \in F$ die zu x nächste Zahl.
Dann gilt: $\beta^{-1} \varepsilon_n |x| \leq |x-y| \leq \varepsilon_n |x|$, $\varepsilon_n = \beta^{1-t}$

Def: Bereich(F) := $\{x \in \mathbb{R} \mid x_{min}(F) \leq |x| \leq x_{max}(F)\} \cup \{0\}$

Satz: $\forall x \in F \exists \delta \in \mathbb{R} : rd(x) = x(1+\delta) \wedge |\delta| \leq u$
wobei $u = u(F) = \frac{1}{2} \beta^{1-t}$ Rundungseinheit

Variante: $\forall x \in F \exists \delta \in \mathbb{R} : rd(x) = x(1+\delta)^{-1} \wedge |\delta| \leq u$

Def: (Math. Standardmodell der Rundung) Die Rundung zur Gleitkommazahl F ist eine Fkt. $rd: \text{Bereich}(F) \rightarrow F$ damit, dass $\forall x, y \in \text{Bereich}(F)$ mit $x \cdot y \in \text{Bereich}(F)$ ein $\delta \in \mathbb{R}$ existiert, s.d.

$rd(x \cdot y) = (x \cdot y)(1 + \delta)$, $|\delta| \leq u$, $0 \in \{+, -, /, \cdot\}$, alt: $rd(x/y) = \frac{rd(x)}{rd(y)}$
Bem: rd ist weder kommutativ noch assoziativ.

Lemma 1.15: Für $|\delta| \leq u$, $g, \pm 1$, $n \in \mathbb{N}$ $\exists \theta_n \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{1 \pm \delta} = 1 + \theta_n$, $|\theta_n| \leq \frac{n \cdot u}{1 - n \cdot u} =: \gamma_n(F)$. ($u = u(F)$)
Bew: Induktion über n

Rundungsanalyse Skalarprod: Betrachte $s := \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $i=1, \dots, n$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ mit Satz 1.10 folgt

$\hat{s}_1 = rd(x_1 y_1) = x_1 y_1 (1 + \delta_1)$
 $\hat{s}_2 = rd(\hat{s}_1 + x_2 y_2) = (\hat{s}_1 + x_2 y_2)(1 + \delta_2)$
 $= x_1 y_1 (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) + x_2 y_2 (1 + \delta_2)$
Induktiv $\hat{s}_n = x_1 y_1 (1 + \delta_1) \dots (1 + \delta_n) + x_n y_n (1 + \delta_n)$
Lemma 1.15 $\Rightarrow$
 $\hat{s}_n = x_1 y_1 (1 + \theta_1) + x_2 y_2 (1 + \theta_2) + \dots + x_n y_n (1 + \theta_n)$
mit $\theta_i \in \mathbb{R}$ $\exists \theta_1, \dots, \theta_n$ s.d. $|\theta_i| \leq \gamma_n$
 $rd(x^T y) = (x + \Delta x)^T (y + \Delta y) = x^T y + \Delta x^T y + x^T \Delta y + \Delta x^T \Delta y$
Dies ist der Rückwärtsfehler.
Vorwärtsfehler:
 $|x^T y - rd(x^T y)| \leq \gamma_n \sum_{i=1}^n |x_i y_i| = \gamma_n |x^T y|$

Auslöschung: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ $\hat{a} = rd(a)$, $\hat{b} = rd(b)$, $\hat{a} = a(1 + \delta_a)$, $\hat{b} = b(1 + \delta_b)$
mit $|\delta_a|, |\delta_b| \leq u$ Dann gilt für $x = \hat{a} - \hat{b}$: $\frac{x - \hat{x}}{x} = \frac{a(1 + \delta_a) - b(1 + \delta_b) - (a - b)(1 + \delta_x)}{a(1 + \delta_a) - b(1 + \delta_b)}$
Der relative Fehler in der Berechnung $x = a - b$ ist groß falls $|a| \approx |b|$

3. Interpolation & Approximation

Def: $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschieden. So heißen $l_i(x) := \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \in P_n$ ($i=0, \dots, n$) die zugehörigen Lagrange-Interpol. Polyn. und erfüllen Kronecker-Eig. $l_i(x_j) = \delta_{ij}$

Satz 3.6: Seien $x_0, \dots, x_n, x \in [x_0, x_n], f \in C^{n+1}$. Dann gilt für $p_n \in P_n$ mit $p_n(x_i) = f(x_i)$

$E_n[f](x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$, wobei $\xi(x) \in \omega_{n+1}(x) = (x-x_0) \dots (x-x_n) \in P_{n+1}$

Bew: $x \neq x_i$: (Sum + klar) setze

$g(x) = E_n[f](x) - \omega_{n+1}(x) E_n[f](x) / \omega_{n+1}(x)$

$\Rightarrow g$ hat $n+2$ NS & $g \in C^{n+1} \Rightarrow g^{(n+1)}$ hat 1 NS &

Aussage folgt mit Cauchy $\square$

Hermite Interpol: Wir def. die $n+1$ -lineare Abb.

$M_{ij}: C^n([a,b]) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto f^{(i)}(x_j), i=0, \dots, d_j, j=0, \dots, m-1$

Hermite Interpol. Aufg: Finde $p_n \in P_n$ s.d. $M_{ij}(p) = M_{ij}(f)$

für alle i,j , wobei $n+1 = m + d_0 + \dots + d_{m-1}$

Satz 3.13: Die Hermite Int. Aufg. lässt sich

eindeutig lösen. Bew: $M: P_n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, p \mapsto (M_{ij}(p))$

ist linear, injektiv und wegen $\dim P_n = \dim \mathbb{R}^{n+1}$

bijektiv. $\square$

Verallg. Newton auf Hermite: Zähle Stützstellen mehrfach

& falls $x_i = \dots = x_j$, so setze $f[x_i] := f(x_i)$ &

$f[x_i, \dots, x_j] := f^{(j-i)}(x_i) / (j-i)!$. Rest analog Newt.

Def: Die Zahl $\Lambda_n = \Lambda_n(x_0, \dots, x_n) := \|\sum_{k=0}^n l_k(x)\|_\infty$

heißt Lebesgue-Konstante zu den Stützstellen

$x_0, \dots, x_n$. Sie ist ein Maß für die absolute

Kondition der Polynominterpol. an den Stützstellen

$x_0, \dots, x_n$ Satz 3.21: Es gilt für $x_0, \dots, x_n$

Quasioptimalität: $\|f - I^n[f]\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \inf_{q \in P_n} \|f - q\|_\infty$

Bew: $q \in P_n$ bel., $\|f - I^n[f]\|_\infty = \|f - q + q - I^n[f]\|_\infty$

$\leq \|f - q\|_\infty + \|I^n[f] - q\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \|f - q\|_\infty$

Bem: Mit Satz 3.6 folgt die Abschätzung

$\|f - I^n[f]\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\omega_{n+1}\|_\infty$. In Serie haben

wir gezeigt, dass diese scale-invariant ist. Mit

$t: [a,b] \rightarrow [-1,1], x \mapsto \frac{2x-a-b}{b-a}$

$t^{-1}: [-1,1] \rightarrow [a,b], \tilde{x} \mapsto \frac{a+b}{2} + \tilde{x} \frac{b-a}{2}$

dürfen wir oBdA alle Abschätzungen auf $[-1,1]$ führen.

Chebyshev-Projektion: Für $f, g \in C([-1,1])$ def. wir

$(f, g)_w := \int_{-1}^1 f(x)g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, wobei $w(x) = (1-x^2)^{-1/2}$

die sog. Chebyshev-Gewichtsfkt. ist. Sei $L_w^2([-1,1]) \subseteq L^2([-1,1])$

der UVR der Fkt. $\kappa \in L_w^2([-1,1]) = (f, f)_w$ endlich

ist, Inklusion ist strikt ($(1-x^2)^{-1/4}$), so bildet

$L_w^2([-1,1])$ einen vollst. innerprodukt. Raum (Hilbertraum).

Lemma 3.33: 1) $C([-1,1]) \subseteq L_w^2([-1,1])$

2) $\forall f \in C([-1,1]): \|f\|_{L_w^2} \leq C \|f\|_{C([-1,1])}$, $C^2 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Bestapproximationsproblem: $f \in C([-1,1])$ finde $p_n \in P_n$ s.d.

$\|f - p_n\|_{L_w^2} = \min_{p \in P_n} \|f - p\|_{L_w^2}$. Dies wird gelöst von der

Orthogonalproj. (Chebyshev-Proj.) von f auf P_n . Hilfrich

$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)) = \frac{1}{2}(z^k + z^{-k}) = \operatorname{Re}(e^{ik \arccos(x)}) = \cos(k \theta)$

für $x = \cos(\theta) \in [-1,1]$

Satz 3.2: Seien (x_i, y_i) Wertepaare mit x_i paarw.

versch. ($i=0, \dots, n$). Dann wird Interpolationsaufg.

eindeutig durch $p_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x)$ gelöst.

($\rightarrow$ Lagrange'sche Darstellung von p_n). Bew mit Fund. Satz

(oder Vandermonde)

Satz 3.5: Seien $x_0, \dots, x_n$ paarw. versch. Dann bilden

$l_0, \dots, l_n$ eine Basis von P_n . Bew. v. d. L. P_n $\dim P_n = n+1$

Auswertung von $p_n(x)$ in Lagr. Darst. $O(n^2)$ flops.

Alt: Für $j=0, \dots, n$ berech. man vorher $\lambda_j := (\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i))^{-1}$. Dann gilt $l_j(x) = \omega_{n+1}(x) \frac{\lambda_j}{x - x_j}$

Es folgt die baryzentrische Darstell. des Lagrange

Int. Poly. $p_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^n \frac{\lambda_j y_j}{x - x_j}$, $O(n)$ Ausw.

Zudem gilt die baryzentrische Interpolationsformel

$p_n(x) = (\sum_{j=0}^n \frac{\lambda_j y_j}{x - x_j}) \cdot (\sum_{j=0}^n \frac{\lambda_j}{x - x_j})^{-1}$ (folgt durch

Betrachtung $y_i = 1$)

Lemma 3.11: Seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschieden &

p_n s.d. $p_n(x_i) = f(x_i)$ für eine Fkt. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - p_n(x) = f[x_0, \dots, x_n, x] \omega_{n+1}(x)$

Bew: Interpoliere $E[f](x)$, nutze NS & Linearität d. d. D.

Korollar 3.12: Seien $x_0, \dots, x_n, f \in C^{n+1}([x_0, x_n])$

Dann $\forall x \in [x_0, x_n] \exists \xi \in (x_0, x_n): f[x_0, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$

Bew: direkt mit Satz 3.6 & Lemma 3.11

Def: Wir def. den Interpolationsoperator I^n als die

lineare Abb., welche für $x_0, \dots, x_n \in [a,b], I^n[f] = p_n$

das eind. bestimmte Interpolationspolynom.

$I^n: C^n([a,b]) \rightarrow P_n: f \mapsto p_n = I^n[f]$

Stirling'sche Ungleichung: $n \geq 1: \frac{n!}{e^n} \leq n^n \leq \frac{n! e^n}{2\pi n}$

Für ein n äquidistante Stützstellen ($x_j = 0.5 + j$) gilt

$\Lambda_n \approx \frac{e}{\pi} (\log n + \gamma)$, $\gamma \approx 0.577$

Satz 3.22 (Weierstrass) $\forall f \in C([-1,1])$

$\forall \epsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \exists p_n \in P_n: \|f - p_n\|_\infty \leq \epsilon$

Satz 3.23 $\forall f \in C([a,b]) \exists p_n \in P_n$

$\|f - p_n\|_\infty \leq \inf_{q \in P_n} \|f - q\|_\infty$

Satz 3.25 (Jackson) Es ex. Konstante $C_j > 0$, s.d.

$\forall f \in C([a,b]) \forall n \in \mathbb{N}: \min_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty \leq C_j \omega(f, \frac{1}{n})$

Def: ω_n wird von den Chebyshev-Punkten minimiert

$\forall n \in \mathbb{N}$ sind die $n+1$ Ch.-Pkt. in $[-1,1]$ durch

$x_i^{(n)} = \cos(\frac{2i+1}{2n+2} \pi)$, $i=0, \dots, n$ gegeben

Def: Seien $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$. Dann ist das k -te Chebyshev

Polynom $T_k(x)$ definiert rekursiv $T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$

Lemma 3.30: Eigenschaften Chebyshev-Polynome T_n

1) Alle T_n haben ganzzahlige Koeffizienten

2) Der höchste Koeffizient von T_n ist $a_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$

3) T_n gerade Fkt. falls n gerade, ungerade Fkt. falls n ungerade

4) Es gilt $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ für $-1 \leq x \leq 1$

5) $|T_n(x)| \leq 1, -1 \leq x \leq 1$

6) Für $n \geq 1$ nimmt T_n extrem. Wert 1 in $[-1,1]$ genau an den

$n+1$ Clenshaw-Curtis Punkten $\tilde{x}_j^{(n)} = \cos(j\pi/n)$, $j=0, \dots, n$ an.

7) Für $n \geq 1$ sind die n NS. von T_n durch die Chebyshev

Punkte $x_j^{(n)}$, $j=0, \dots, n-1$ gegeben

Lemma 3.34: Die rechte Chebyshev Poly. $\tilde{T}_k$ sind durch

$\tilde{T}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tilde{T}_k = (\frac{2}{\pi})^{1/2} T_k$, $k \geq 1$ bilden ONB in $L_w^2([-1,1])$

Bew: Es gilt $\int_{-1}^1 \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \pi/2 & m=n \neq 0 \\ \pi & m=n=0 \end{cases}$

Rest folgt mit rechnen (subst. $x = \cos(\theta)$). $\square$

Horner-Schema: Auswertung p_n in $O(n)$ falls $c_0, \dots, c_n$ gegeben.

$p_n(x) = (\dots((c_n x + c_{n-1})x + c_{n-2})x + \dots + c_1)x + c_0$

MATLAB

function $y = \text{horner}(c, x)$

$n = \text{length}(c) - 1$; $k = \text{length}(x)$; $y(1:k, 1) = c(n+1)$;

for $j = n:-1:1$, $y = c(j) + y.*x$; end

Newton-Interpolation: $p_{n-1} \rightarrow p_n$, Ansatz: $p_n = p_{n-1} + q_n$ (*)

Int. Bed. $y_i, y_{n+1} \Rightarrow q_n = a_n \omega_n$, Int. Bed. $y_n \Rightarrow a_n = (y_n - p_{n-1}(x_n)) / \omega_n(x_n)$

Def: Seien $f[x_0] = y_0, \dots, f[x_n] = y_n$. Def. rekursiv

$f[x_0, \dots, x_j] = \frac{f[x_0, \dots, x_{j-1}] - f[x_1, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_0}$ für $j \geq 1$. Dann bezeich.

$f[x_0, \dots, x_n]$ mit $0 \leq k \leq n$ die k -te dividierte Differenz zu (x_i, y_i)

Lemma 3.9: Für $n \geq 1$, sei a_n wie in (*). Dann $a_n = f[x_0, \dots, x_n]$.

Bew: Induktion über # Stützstellen. Ang. gilt für $n-1$.

Dann $p_{n-1}(x) = \tilde{p}_{n-2}(x) + f[x_0, \dots, x_{n-1}](x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$

$\tilde{p}_{n-2}(x) = \tilde{p}_{n-2}(x) + f[x_1, \dots, x_{n-1}](x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$

wobei $\tilde{p}_{n-2}$ $x_0, \dots, x_{n-1}$ interpoliert & $\tilde{p}_{n-1}$ $x_0, \dots, x_n$. Hier wurde

$f[x_1, \dots, x_{n-1}, x_0] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$ verwendet. Da Resultat

folgt nun durch Auswertung bei x_n von $p_{n-1}, \tilde{p}_{n-1}$ & Ausrechnen $\square$

Newton'sche Interpol. Formel: Mit Lemma 3.9 folgt

$p_n = p_{n-1} + f[x_0, \dots, x_n] \omega_n$. Wiederholtes Anwenden liefert

$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f[x_0, \dots, x_k] \omega_k(x)$, $\omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$, $\omega_0 \equiv 1$

Bsp. (Runge), $f(x) = (1+x^2)^{-1}$, $[a,b] = [-5,5]$ (x_i äquidistant

so divergiert der Fehler $f(x) - I^n[f](x)$ an den Rändern von $[a,b]$)

Def: Der Stetigkeitsmodul von $f \in C([a,b])$ zur Schrittweite $h > 0$

ist definiert durch $\omega(f; h) = \max \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b], |x - y| \leq h \}$

Eigenschaften:

(w1) $h \mapsto \omega(f; h)$ ist nichtnegativ, monoton wachsend & subadditiv, d.h.

$\forall h_1, h_2 \geq 0: \omega(f; h_1 + h_2) \leq \omega(f; h_1) + \omega(f; h_2)$

(w2) $\forall n \in \mathbb{N}: \omega(f; nh) \leq n \omega(f; h)$, $\forall \lambda > 0: \omega(f; \lambda h) \leq (1 + \lambda) \omega(f; h)$

(w3) $f \in C([a,b]): h \mapsto \omega(f; h)$ stetig & $\lim_{h \rightarrow 0} \omega(f; h) = 0$. (w4) $f \in C^1([a,b]): \omega(f; h) \leq h \|f'\|_\infty$

Bem: Für $f(x) = |x|^\alpha$ auf $[-1,1]$, $0 < \alpha \leq 1$ gilt $\omega(f; h) \leq h^\alpha$, bzw. $|x|^\alpha - |y|^\alpha \leq |x - y|^\alpha \leq 4$

Korollar 3.26: $\forall \epsilon \in \mathbb{N}, \epsilon > 0 \forall f \in C([-1,1]) \exists n \geq 1$ Beweisidee:

$\min_{p \in P_n} \|f - p\|_\infty \leq C_\epsilon n^{-\epsilon} \|f^{(\epsilon)}\|_\infty$ (Satz 3.25, $\frac{1}{n^\epsilon} \in P_n$, s. u., Stirling w.)

Satz 3.28 (Min-Max Eig. der Chebyshev Pkt.): Seien die Stützstellen

$x_0, \dots, x_n$ die Chebyshev Pkt. in $[-1,1]$. Sei $\omega_{n+1}(x)$ das dazugeh. Knotenpoly.

Dann $\forall T_{n+1} \in P_{n+1}$ der Form $T_{n+1}(x) = x^{n+1} + a_n(x)$, $a_n \in P_n$ gilt

$\|T_{n+1}\|_\infty \geq \| \omega_{n+1} \|_\infty = 2^{-n}$, Gleichheit $\Leftrightarrow T_{n+1} = \omega_{n+1}$.

Satz 3.31: Das Chebyshev-Polynom T_n hat minimale L_∞ -Norm auf

dem Intervall $[-1,1]$ unter allen Polynomen von Grad n mit höchstem

Koeffizienten $a_n = 2^{n-1}$

Bew. Via Widerspruch. Ang. $\exists p_n \in P_n$ mit hoch. Koeff. $a_n = 2^{n-1}$ mit

$\|p_n\|_\infty < \|T_n\|_\infty = 1$. Nach L3.30, 2) ist $T_n - p_n \in P_{n-1}$. L3.30 6) $\Rightarrow$

$T_n(\tilde{x}_{2n}) = 1, p_n(\tilde{x}_{2n}) < 1 \Rightarrow p_n(\tilde{x}_{2n}) - T_n(\tilde{x}_{2n}) < 0$ $\tilde{x}_j = \cos(j\pi/n)$

$T_n(\tilde{x}_{2n+1}) = -1, p_n(\tilde{x}_{2n+1}) > -1 \Rightarrow p_n(\tilde{x}_{2n+1}) - T_n(\tilde{x}_{2n+1}) > 0$, $j=0, \dots, n$

Damit ist $T_n - p_n$ an den $n+1$ Pkt. abw. pos. & neg. $\Rightarrow$

mind. n NS. in $[-1,1]$ & Grad von $T_n - p_n \leq n-1$. $\square$

Lemma 3.35: Sei $f \in C([-1,1])$ gegeben. Dann ist die eindeutige Ls. des Best-

approx. Prob. gegeben durch (Faktor $2/\pi$ ersetzen durch $1/\pi$ für $k=0$)

$\tilde{f}_n = \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k = \sum_{k=0}^n a_k T_k$, $\tilde{a}_k = (f, \tilde{T}_k)_w$, $a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$\tilde{f}_n$ heißt Chebyshev-Projektion von f auf P_n

Bew: Wegen $P_n = \text{span} \{T_k\}_{k=0}^n$ ist das Bestapprox. Prob. äquivalent

zu $\min_{\tilde{a}_0, \dots, \tilde{a}_n} \|f - \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k\|_{L_w^2}$. Mit Projektionsarg. ist dies wieder äquivalent

zu $f - \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k \perp q$ für alle $q \in P_n$ (bzgl. $(\cdot, \cdot)_w$). Wegen $P_n = \text{span} \{T_k\}_{k=0}^n$

also gdw. $(f - \sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k, \tilde{T}_m)_w = 0$ für alle $m=0, \dots, n$. Weil ONB folgt

$0 = (f, \tilde{T}_m)_w - (\sum_{k=0}^n \tilde{a}_k \tilde{T}_k, \tilde{T}_m)_w = (f, \tilde{T}_m)_w - \tilde{a}_m \Rightarrow \tilde{a}_m = (f, \tilde{T}_m)_w$

Rest mit L3.34. $\square$

11.11.2017
 Stückerweise affine Interpolation $S^1(\Delta)$: Stützstellen $a_0, \dots, a_{n+1}$
 $\Delta = [x_0, \dots, x_n]$, $S^1(\Delta) = \{g \in C([x_0, x_n]) : g|_{[x_{j-1}, x_j]} \in \mathbb{P}_1\}$
 Wir bezeichnen mit $I_\Delta^1 : C([x_0, x_n]) \rightarrow S^1(\Delta)$ die Abb., welche
 einem $f \in C([x_0, x_n])$ ihre sog. Spline-Interpolierende in $S^1(\Delta)$
 zuordnet. Def. $I_\Delta^1 f(x) = g(x)$ mit $g(x) = f(x_j) \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} + f(x_{j-1}) \frac{x - x_j}{x_{j-1} - x_j}$
 für $x \in [x_{j-1}, x_j]$, $j=1, \dots, n$.
 Rolle $\Rightarrow \forall j \exists \xi_j \in I_j : g(\xi_j) = 0$ & $\|g\|_{\infty, I_j} = |g(\xi_j)|$.
 $\Rightarrow \|g\|_{\infty, I_j} = |g(\xi_j)| = |g(\xi_j) - g(x_{j-1})| = \left| \int_{x_{j-1}}^{\xi_j} g'(t) dt \right| \leq h_j \|g'\|_{\infty, I_j}$
 wobei gilt $g'(x) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} = f'(\xi_j)$
 $\Rightarrow \|g\|_{\infty, I_j} \leq 2 \|f'\|_{\infty, I_j}$
 $\Rightarrow \|I_\Delta^1 f\|_{\infty} = \|g\|_{\infty} \leq 2 \max_{j=1, \dots, n} \|f'\|_{\infty, I_j} \leq 2 h_{\max} \|f'\|_{\infty}$
 $f \in C^2 \Rightarrow f = f'' g'$
 $g'(x) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_j} = (x - x_{j-1}) f''(\xi_j) \Rightarrow \|g'\|_{\infty, I_j} \leq h_j \|f''\|_{\infty, I_j}$
 $\Rightarrow \|I_\Delta^1 f\|_{\infty} \leq h_{\max}^2 \|f''\|_{\infty}$
 $f \in C^{1+\alpha}, \alpha \in [0, 1]$, $\|I_\Delta^1 f\|_{\infty} \leq C h_{\max}^{1+\alpha}$, $C = \frac{2^{1+\alpha}}{\alpha!} \frac{|f^{(1+\alpha)}(y)|}{(1+\alpha)!}$

Unstetig stückweise Interpolation $S^0(\Delta)$ Wir betrachten auf jedem Teilintervall I_j ein Polynom s_j d.
 Einblättrige Spline-Interpolation $S^0(\Delta)$ Wir betrachten auf jedem Teilintervall I_j ein Polynom s_j d.
 $s_j(x_{j-1}) = y_{j-1}$, $s_j(x_j) = y_j$, $s_j'(x_{j-1}) = c_{j-1}$, $s_j'(x_j) = c_j$ für vorgeg. $y_{j-1}, y_j, c_{j-1}, c_j \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe mite wirzen
 wir, dass $\exists! s_j \in \mathbb{P}_3$ mit obigen Bed. Wir definieren die Basis von $\mathbb{P}_3$
 $b_0(x) = \phi(x_j - x)/h_j$, $b_1(x) = \phi(x - x_{j-1})/h_j$, $b_2(x) = -h_j \psi((x_j - x)/h_j)$, $b_3(x) = h_j \psi((x - x_{j-1})/h_j)$
 wobei $h_j = x_j - x_{j-1}$, $\phi(z) = 3z^2 - 2z^3$, $\psi(z) = z^3 - z^2$. Es gilt eine Art Kronecker-eig. Also folgt
 $s_j(x) = y_{j-1} b_0(x) + y_j b_1(x) + c_{j-1} b_2(x) + c_j b_3(x)$. Sei s Fkt mit $s|_{I_j} = s_j$ $\forall j$. Per Def gilt $s \in C^1$.
 Mit y_j stellen wir sich, dass s interpoliert. Dann haben wir noch noch $n+1$ (c_j) Parameter.
 Wir verwenden $n+1$ $(c_1, \dots, c_n)$ um $s \in C^2$, also $s_j'(x_j) = s_{j+1}'(x_j)$, $j=1, \dots, n$. Es bleiben c_0, c_n
 Def. $\Delta = [x_0, \dots, x_n]$ mit $a_0 = x_0, \dots, a_n = x_n$
 1) $s \in C^1[0, b]$ $\Rightarrow$ heißt kubischer Spline zu Knoten $a_0, \dots, a_n$ falls,
 i) $s \in C^1[0, b]$ ii) $s|_{I_j} \in \mathbb{P}_3$ $\forall j=1, \dots, n$ ($I_j = [x_{j-1}, x_j]$)
 2) s heißt interpolierender Spline zu Stützstellen $y_0, \dots, y_n$ falls $s(x_j) = y_j$ für $j=0, \dots, n$
 3) s heißt vollständiger interpol Spline, falls neben 1), 2) gilt $s'(a) = c_a$, $s'(b) = c_b$ zu fixierten c_a, c_b
 4) s heißt periodischer interpol Spline mit Periode $b-a$, falls neben 1), 2) gilt $s'(a) = s'(b)$, $j=0, 1, 2$
 5) s heißt natürlicher interpol Spline, falls neben 1), 2) gilt $s''(a) = s''(b) = 0$
 Die Menge aller stückweise kubischen, zweimal stetig diff'baren Funktionen s auf Δ
 bezeichnen wir mit $S^3(\Delta) = \{s \in C^2([a, b]) : s|_{I_j} \in \mathbb{P}_3, x_j \in \Delta\}$
 Konstruktion natürlicher Spline: Obige Formeln vereinfachen sich mit Einführung von Krümmungsinformation
 $K_j = s_j''(x_j)$ anstelle der c_j . Da $K_0 = K_n = 0$. Es bleiben $K_1, \dots, K_{n-1}$. Es folgt $s'' \in \mathbb{P}_1$ und somit $x = x_{j-1} + t h_j$, dann
 $s''(x) = (1-t) K_{j-1} + t K_j \Rightarrow s'(x) = s'(x_{j-1}) + h_j \left(\frac{1-t}{2} K_{j-1} + \frac{t}{2} K_j \right)$
 $\Rightarrow s(x) = s(x_{j-1}) + h_j s'(x_{j-1}) + h_j^2 \left(\frac{1-t}{6} K_{j-1} + \frac{t}{6} K_j \right) + h_j^3 \frac{t^2}{6} K_j$
 Wir setzen $\delta y_j := (y_j - y_{j-1})/h_j$. Dann folgt mit $t = (x - x_{j-1})/h_j$ an der letzten Gleichung
 $s'(x_{j-1}) = \delta y_{j-1} - \frac{h_j}{6} K_{j-1} + \frac{h_j}{6} K_j$, substit. in $s(x)$ mit $x = x_j$ (also $t=1$) gibt $s(x_j) = \delta y_j + \frac{h_j}{6} K_{j-1} + \frac{h_j}{6} K_j$
 Annahmen von C^1 bei x_j liefert, man ergibt $\delta y_j = \frac{h_j}{6} K_{j-1} + \frac{h_j}{6} K_j = \delta y_{j-1} - \frac{h_{j-1}}{6} K_{j-1} + \frac{h_{j-1}}{6} K_{j-2}$
 Umformung $\Rightarrow$ LGS
 für Unbekannte $h_j K_{j-1} + 2(h_j + h_{j-1}) K_j + h_{j-1} K_{j+1} = 6(\delta y_{j-1} - \delta y_j)$, $j=1, \dots, n-1$
 $K_0 = 0, K_n = 0$, $I^5 = \frac{1}{60} \begin{pmatrix} 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & h_3 & 2(h_3 + h_4) & h_4 & \\ & & h_4 & 2(h_4 + h_5) & h_5 \\ & & & h_5 & 2(h_5 + h_6) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$
 Diese ist stetig
zeitendominant
o regular

4. Numerische Integration

Def: $f \in C([a,b])$, $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$. $I^{(n)}[f] = p_n$ in Lagrange-Form

Quadraturformel: $Q_{[a,b]}^{(n)}[f] := I_{[a,b]}^{(n)}[I^{(n)}[f]]$
 $= \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_a^b l_j(x) dx = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$, (α_j sind von f unabh.)

Fehlerabschätzung: $f \in C^{n+1}$, mit Satz 3.6
 $|I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]| \leq (b-a) \max_{\xi \in [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \prod_{j=0}^n |x - x_j| \frac{1}{(n+1)!}$
 $\leq (b-a)^{n+2} \|f^{(n+1)}\|_{\infty} / (n+1)!$

Falls $f \in C^1$, weil $I_{[a,b]}[f] = Q_{[a,b]}^{(1)}[f]$, $a \in P_n$

$|I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(1)}[f]| \leq (b-a) \sum_{j=0}^1 |\alpha_j| \inf_{\xi \in [a,b]} \|f - a\|_{\infty}$

Satz 4.0: Quadraturfehler der Mittelpunktsregel, $f \in C^2([a,b])$

$I_{[a,b]}[f] - (b-a)f(\frac{a+b}{2}) = -\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$, $\xi \in [a,b]$

Taylor-Entwicklung: $f \in C^{n+1}(I)$, I Intervall

$\forall x_0 \in I \forall x \in I$:

$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n f(x, x_0)$

$R_n f(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$

$= \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, $\xi \in (x_0, x)$

Extrapolation: $f \in C^2([1,1])$. Wir wollen $f'(0)$ aus $f(0)$ nicht exp. berechnen. Mit Taylor, $h > 0$

$f(h) = \sum_{k=0}^n \frac{(h)^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{(h)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \Rightarrow$

$f'(0) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h} - \sum_{k=1}^m \frac{h^{2k}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) + \frac{h^{2m+1}}{(2m+1)!} f^{(2m+1)}(\xi)$

$\Rightarrow T(h) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ ist Approximation von $f'(0)$ mit $O(h^2)$

Bemerkung: $f'(0) - T(h) = c_1 h^2 + O(h^4)$, $f'(0) - T(h/2) = c_1 h^4/4 + O(h^6)$

$\Rightarrow T_1(h) = \frac{4T(h/2) - T(h)}{3}$ ist $O(h^4)$ für $f'(0)$

Def: Eine Quadratur $Q_{[a,b]}$ hat Ordnung $n+1$, falls

$\forall p \in P_n: I_{[a,b]}[p] = Q_{[a,b]}[p]$

Satz 4.18: Legendre-Poly q_{n+1} hat genau $n+1$ N.S. in $(-1,1)$ (alle einfach)

Bew: Def: $N := \{ \lambda \in (-1,1) : \lambda \text{ ist NS ungerader Vielfachheit von } q_n \}$

setze $h(x) := \prod_{\lambda \in N} (x-\lambda)$, $m := |N| \Rightarrow q_{n+1} \cdot h$ hat kein

Vorzeichenwechsel in $(-1,1)$ & real. Es gilt:

$\int_{-1}^1 q_{n+1} \cdot h dx \neq 0 \Rightarrow h \notin P_n \Rightarrow m > n$. Also hat q_{n+1}

mind. m verschiedene NS in $(-1,1)$. Fundamentalsatz $\Rightarrow q_{n+1}$ hat genau

$n+1$ NS in $(-1,1)$ alle einfach.

Satz 4.21 (Konvergenz der Gauss Quad.)

$\forall f \in C^q[-1,1]: G^{(n)}[f] \rightarrow I_{[-1,1]}[f]$ für $n \rightarrow \infty$

Bew: Def: $\forall \varepsilon > 0 \exists p \in P_m: \|f - p\|_{\infty, [-1,1]} \leq \varepsilon/4$ nach Satz 3.22

(Weierstrass). Sei n so dass $2n+2 > m$. Dann

$|I[f] - G^{(n)}[f]| \leq |I[f] - I[p]| + |I[p] - G^{(n)}[p]| + |G^{(n)}[p] - G^{(n)}[f]| \leq \varepsilon$

Hier haben wir

$G^{(n)}[1] = \sum \alpha_j = \int_{-1}^1 dx = 2$ verwendet, ($1 \in P_0$)

Geschlossene Newton-Cotes-Formeln: Auf $[a,b]$ Stützstellenwahl

$x_j = a + j \cdot h$, $j = 0, \dots, n$, $h = (b-a)/n$. Tabelle $x_j = a + \xi_j(b-a)$

n | ξ_j | $|\alpha_j|/(b-a)$ | $I_{[a,b]}[f] - Q_{[a,b]}^{(n)}[f]$

1 | Trapezregel | 0, 1 | $1/12, 1/12$ | $-1/12(b-a)^3 f''(\xi)$

2 | Simpsonregel | 0, 1/2, 1 | $1/6, 4/6, 1/6$ | $-1/90(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$

3 | 3/8-Regel | 0, 1/3, 2/3, 1 | $1/8, 3/8, 3/8, 1/8$ | $-3/80(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$

4 | Milne-Regel | 0, 1/4, 3/4, 1 | $1/90, 3/90, 3/90, 1/90$ | $-8/45(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$

Bem: Ab $n=8$ erhalten wir für α_j neg. Werte. Dies führt zu einer Auslöschung bei der Praxis relevant.

Offene Newton-Cotes-Formeln: $x_j = a + (j+1)h$, $j = 0, \dots, n$, $h = (b-a)/(n+2)$

$Q_{[a,b]}^{(n)}[f] = (b-a) f((b-a)/2)$

$Q_{[a,b]}^{(1)}[f] = \frac{b-a}{2} [f(a+h) + f(b-h)]$ schon hier neg. Gew.

$Q_{[a,b]}^{(2)}[f] = \frac{b-a}{3} [2f(a+h) - f(\frac{a+b}{2}) + 2f(b-h)]$

$Q_{[a,b]}^{(3)}[f] = \frac{b-a}{24} [11f(a+h) + f(a+2h) + f(b-2h) + 11f(b-h)]$

Satz 4.7: $f \in C([a,b])$, $h = (b-a)/N$, Trapezregel

$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(1)}[f]| \leq 2(b-a)\omega(f; h)$

Falls $f \in C^1$, $0 < \alpha < 1$. Dann

$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(1)}[f]| \leq 2(b-a)h^\alpha \|f^{(\alpha)}\|_{\infty}$

Falls f Lipschitz mit konst. $L > 0$, dann

$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(1)}[f]| \leq 2(b-a)hL$

Falls $f \in C^{1+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$

$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(1)}[f]| \leq \frac{b-a}{2} h^{1+\alpha} \|f^{(1+\alpha)}\|_{\infty}$

Falls f' Lipschitz mit $L > 0$

" $\leq \frac{b-a}{2} h^2 L$

Satz 4.12: (Euler-Maclaurinische Summenformel)

Für $f \in C^{2p+2}([a,b])$ mit $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ gilt für die summierte Trapezregel $T(h) = Q_h^{(1)}[f]$ der Schrittweite $h = \frac{b-a}{N}$ eine Asymptotische Entwicklung.

$T(h) = c_0 + c_1 h^2 + c_2 h^4 + \dots + c_p h^{2p} + R_{p+1}(h) h^{2p+2}$

wobei $c_0 = I_{[a,b]}[f]$, B_k Bernoulli Zahlen

$c_k = \frac{(-1)^{k+1} B_k}{(2k)!} [f^{(2k)}(b) - f^{(2k)}(a)]$, $k = 1, \dots, p$

$R_{p+1}(h) = \frac{(-1)^{p+1} B_{2p+2}}{(2p+2)!} \int_a^b f^{(2p+2)}(x) [S_{2p+2}(x-a/h) - S_{2p+2}(0)] dx$

Für λ -periodische Fkt. S_{2p+2}

Satz 4.21: Seien $x_0, \dots, x_n \in (-1,1)$ die Nullstellen des Legendre-Polynoms q_{n+1} und $l_0, \dots, l_n$ die ents. Lagrange-Basis

Mit der Wahl $\alpha_j = \int_{-1}^1 l_j(x) dx$ hat die coe. Gauss-Quadratur $G_{[-1,1]}^{(n)}[f] = \sum_{j=0}^n \alpha_j f(x_j)$ mit $n+1$

Knoten die Ordnung $2n+2$.

Bew: $p \in P_{2n+1}$ bel. Polynomdgr. mit q_{n+1} liefert

$p = h \cdot q + r$ mit $h, r \in P_n$. Rest ausrechnen (beachte

$I^{(n)}[r] = r$. Gewichte sind pos. nimm $\alpha_j \in P_n$

Bew: Für $a \in \mathbb{R}$ bel. & $f \in C([a,b])$ betrachten wir

$\gamma: [-1,1] \rightarrow [a,b]$, $x \mapsto \frac{b-a}{2} x + \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow \int_a^b f(y) dy = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(\gamma(x)) dx$

$= \frac{b-a}{2} \sum_{j=0}^n \alpha_j f(\gamma(x_j)) + \frac{b-a}{2} R^{(n)}[f(\gamma(\cdot))]$

Satz 4.2

Mittelpunktsregel: $Q_{[a,b]}^{(0)}[f] = f((a+b)/2)(b-a)$

Trapezregel: $Q_{[a,b]}^{(1)}[f] = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a)$

Simpsonregel: $Q_{[a,b]}^{(2)}[f] = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)]$

Wir teilen $[a,b]$ in Teilintervalle auf

$x_j = a + jh$, $j = 0, \dots, N$, $h = \frac{b-a}{N}$

Summierte Quadraturformel: $Q_h^{(n)}[f] = \sum_{j=0}^{N-1} Q_{[x_j, x_{j+1}]}^{(n)}[f]$

Für $n=1$ ergibt sich sum. Trapezr. $Q_h^{(1)}[f] = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{2} (f(x_j) + f(x_{j+1})) = \frac{b-a}{2} [f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + f(b)]$

$n=2$ sum. Simpsonr. $Q_h^{(2)}[f] = \frac{b-a}{6} [f(a) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} f(x_j) + 4 \sum_{j=0}^{N-1} f(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}) + f(b)]$

Satz 4.5: (Fehlerabschätzungen)

$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(n)}[f]| \leq \frac{1}{12} (b-a) \|f^{(n)}\|_{\infty, [a,b]}$, $f \in C^n([a,b])$

$|I_{[a,b]}[f] - Q_h^{(n)}[f]| \leq \frac{h^4}{2880} (b-a) \|f^{(4)}\|_{\infty, [a,b]}$, $f \in C^4([a,b])$

Bew: Wende Satz 4.2 auf Teilint. an

Bew: $N=1$ (sum. Trapezr.): $|I_{[a,b]}[f] - Q^{(1)}[f]| = |\int_a^b f(x) dx - p_1(x)| = |\int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)|$

$= |\int_a^b f(x) dx - \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)| \leq \int_a^b |f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}| dx \leq \int_a^b \omega(f; |x-a|) dx$

$\leq \int_a^b \omega(f; h) dx \leq \omega(f; h) \int_a^b 1 dx = \omega(f; h)(b-a)$

Falls $f \in C^1$

$|I[f] - Q^{(1)}[f]| \leq \int_a^b |f(x) - \frac{f(a)+f(b)}{2}| dx \leq \int_a^b |f(x) - f(\xi)| dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \omega(f; h)$

Romberg-Schema: Setze $T_0(2^{-i}h) = T(2^{-i}h)$

mit sum. Trapezr. für $i=0, \dots, m$. Dann rekursiv für $k=1, \dots, m$

$T_k(2^{-i}h) = \frac{4^k T_{k-1}(2^{-i+1}h) - T_{k-1}(2^{-i}h)}{4^k - 1}$

$i=0, \dots, m-k$. Dann ist $T_m(h)$ eine Approx. von $I_{[a,b]}[f]$. ($f \in C^{2m+2}$)

Def: Legendre-Polynom $q_n \in P_n$, $q_{n+1}(1) = 1$

erfüllt: $\forall h \in P_n: \int_{-1}^1 q_{n+1}(x) h(x) dx = 0$

(q_{n+1} orthogonal zu allen $h \in P_n$). Also $q_{n+1} \perp P_n$

Satz 4.20: Legendre $q_0, q_1, \dots$

$q_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} q_n(x) \cdot x - \frac{n}{n+1} q_{n-1}(x)$

$q_0 = 1$, $q_1 = x$

Satz 4.22: (Fehler Gauss Quadratur)

$f \in C^{2n+2}([-1,1]) \exists \xi \in (-1,1):$

$G^{(n)}[f] - I_{[-1,1]}[f] = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n (x-x_j) dx$

$R^{(n)}[f] = \frac{2^{n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3)!(2n+2)!^3} f^{(2n+2)}(\xi)$

5. Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Problem: Für $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ finde $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$

Def: Ein Iterationsverfahren heißt konvergent (abhängig von Startwert $x^{(0)}$), falls die Folge $(x^{(k)})_k$ der Iterierten gegen ein $x^* \in D$ mit $F(x^*) = 0$ konvergiert.

Def: Ein Iterationsverfahren konvergiert lokal gegen $x^* \in D$, falls es offene Umg. $U \subseteq D$ um x^* gibt, so dass das Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in U$ gegen x^* konvergiert. Ein Iterationsverfahren konvergiert global gegen $x^* \in D$, falls das Verfahren für jeden Startwert $x^{(0)} \in D$ gegen x^* konvergiert.

Def: Eine Folge $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k=0,1,\dots$ konvergiert linear gegen $x^* \in \mathbb{R}^n$, falls es $L < 1$ & $k_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, s.d. $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq L \|x^{(k)} - x^*\|$, $\forall k \geq k_0$ für eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$

Def: Eine konvergente Folge $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$, $k=0,1,\dots$ konvergiert von p-ter Ordnung mit $p > 1$ gegen x^* , falls es ein $C > 0$ gibt, s.d. $\forall k \in \mathbb{N}$ gilt $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C \|x^{(k)} - x^*\|^p$

Def: Eine Fixpunktgleichung heißt konsistent, falls $f(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$

Satz 5.8 (Lokal lineare Konvergenz)

Sei $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Phi(x^*) = x^*$. Ist Φ in einer Umg. von x^* stetig diff'bar und gilt $|\Phi'(x^*)| < 1$, dann ex. ein $\varepsilon > 0$, s.d. die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x^{(0)}$ mit $|x^{(0)} - x^*| \leq \varepsilon$ linear gegen x^* konv.

Bew: Sei $\Phi' \in C^0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0: L := \max_{x \in B_\varepsilon(x^*)} |\Phi'(x)| < 1$, wobei $B_\varepsilon(x^*) = [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$. Nach MWS gilt $\forall x, y \in D \exists \xi(x, y) \in D$:

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)| |x - y| \leq L |x - y|$$

Für $x^{(0)} \in D$ bel. folgt

$$|x^{(1)} - x^*| = |\Phi(x^{(0)}) - \Phi(x^*)| \leq L |x^{(0)} - x^*| < \varepsilon$$

Womit durch Induktion für alle $k \in \mathbb{N}$

$$|x^{(k+1)} - x^*| = |\Phi(x^{(k)}) - \Phi(x^*)| \leq L |x^{(k)} - x^*| \leq L^{k+1} |x^{(0)} - x^*| < \varepsilon$$

Womit alle $x^{(k)} \in D$ & lineare Konvergenz folgt. $\square$

Satz 5.9 (Lokale konv. der Ordnung $p \geq 2$)

Sei $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x^*) = x^*$. Sei Φ $(m+1)$ -mal stetig diff'bar in einer Umg. von x^* & $\Phi'(x^*) = \dots = \Phi^{(m)}(x^*) = 0$. Dann konv. die Fixpunktiteration lokal mit Ordnung $p = (m+1)$

Bew: Mit der Taylorentw. um x^* folgt

$$x^{(k+1)} - x^* = \Phi(x^{(k)}) - \Phi(x^*) = \sum_{\ell=1}^m \frac{1}{\ell!} \Phi^{(\ell)}(x^*) (x^{(k)} - x^*)^\ell + O(|x^{(k)} - x^*|^{m+1}) = O(|x^{(k)} - x^*|^{m+1})$$

Per Def. folgt konv. von Ordnung $m+1$.

Satz 5.10 (Banach)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $\Phi: E \rightarrow E$ Selbstabb. &

Kontraktion, d.h. $\exists L < 1 \forall x, y \in E$:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \text{ für eine Vektornorm } \|\cdot\|. \text{ Dann}$$

1) $\exists! x^* \in E: \Phi(x^*) = x^*$

2) $\forall x^{(0)} \in E$ konv. $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ gegen x^*

3) Mit obiger Norm gilt die a-priori Fehlerabsch.

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq L^k (1-L)^{-1} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

4) Es gilt die a-posteriori Fehlerabsch.

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq L (1-L)^{-1} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Korollar 5.11: Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi(x^*) = x^*$ für ein $x^* \in \mathbb{R}^n$. Sei Φ

stetig diff'bar in einer Umg. von x^* . Für eine mit einer Vektornorm verträgliche, submultiplikative Matrixnorm gelte $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.

Dann $\exists \varepsilon > 0$, s.d. mit $E = B_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$ die Voraussetzungen von Satz 5.10 erfüllt sind.

Newton-Verfahren: Ang: $f \in C^1$ & $f'(x^*) \neq 0$

Es gilt $f(x) = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = x$ für $\Phi(x) := x - f(x)/f'(x)$

Die def. Iteration $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}) = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}$

1) Falls $f \in C^2$, so erhält man

$$\Phi'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = 0$$

und falls sogar $f \in C^3$, so erhalten wir mit Satz 5.9 lokal quadratische konv.

2) Falls $f \in C^2$, so mit Taylorentw. um $x^{(0)}$

$$f(x) = f(x^{(0)}) + (x - x^{(0)})f'(x^{(0)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(0)})^2 f''(\xi_k)$$

für ξ_k zwischen $x, x^{(0)}$. Mit Einsetzen von $x = x^*$ folgt

$$0 = f(x^*) = f(x^{(0)}) + (x^* - x^{(0)})f'(x^{(0)}) + \frac{1}{2}(x^* - x^{(0)})^2 f''(\xi_k)$$

und damit

$$x^{(k+1)} - x^* = \frac{1}{2}(x^* - x^{(0)})^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x^{(0)})}$$

$\Rightarrow$ konv. $p=2$.

6. Ausgleichsrechnung

Def: (Lineares Ausgleichsproblem)

Sei $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|_q$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$.
Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und ein $b \in \mathbb{R}^m$ heißt das
Problem: "Finde $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Ax - b\|_q$ minimal derart,
dass $\forall y \in \mathbb{R}^n: \|Ax - b\|_q \leq \|Ay - b\|_q$ ". Ausgleichsproblem.
(Im folgenden immer $p=q=2$).

Satz 6.9: Sei $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rang}(A) = n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Sei
 $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ obere Dreiecksmatrix
so dass
 $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times n \\ 3 \times m-n \end{matrix}$ Sei ferner der Vektor

$\tilde{b} = Q^T b \in \mathbb{R}^m$ wie folgt partitioniert: $Q^T b = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \times n \\ 3 \times m-n \end{matrix}$

Dann ist die Lösung des Ausgleichsproblems die
eindeutige Lösung des Dreieckssystems $Rx = \tilde{b}_1$.

Def: Sei $A = U \Sigma V^T$ eine SVD von $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann
heißt $A^+ := V \Sigma^+ U^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (Moore-Penrose) Pseudo-
inverse von A mit $\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^{-1} & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$

Ex: Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = n$ gilt $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$
und $x = A^+ b$ ist die eind. Lsg. der NG.

Rechteckmatrizen mit Rangdefekt: Ang. wir haben
 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $r = \text{rang}(A) < \min\{m, n\}$. Sei $A = U \Sigma V^T$
die SVD von A . Dann lässt sich das Ausgleichsproblem
wie folgt äquivalent umschreiben: "Finde $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ mit
 $\|\tilde{x}\|_2$ minimal derart, dass $\|\Sigma \tilde{x} - \tilde{b}\|_2 \leq \|\Sigma y - \tilde{b}\|_2$ für alle
 $y \in \mathbb{R}^n$ ", wobei $\tilde{b} = U^T b$. Dies wird von $\tilde{x}$ gelöst,
odw. $x = V \tilde{x}$ das ursprüngliche löst.

Lemma 6.21: Die Lösung $\tilde{x}$ ist eindeutig und
explizit gegeben durch $\tilde{x} = \Sigma^+ \tilde{b} = \Sigma^+ U^T b$.

Normalengleichung: Sei $x \in \mathbb{R}^n$. Wir betrachten

$\Phi(x) := \|b - Ax\|_2^2$. $\Phi(x)$ hat dann ein Minimum bei x , g.d.w.
 $\forall z \in \mathbb{R}^n, \|z\|_2 = 1$ die Fkt. $\tilde{\Phi}_z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|b - A(x + tz)\|_2^2$ ein Min.
bei $t=0$ hat. Für festes z ist $\tilde{\Phi}_z$ ein quadr. Polyn. in t . Berechnen
 $\tilde{\Phi}_z(t) = t^2 (z^T A^T A z) + 2t (z^T A^T A x - z^T A^T b) + (x^T A^T A x + b^T b - 2x^T A^T b)$.
Also hat $\forall z \in \mathbb{R}^n$ Minimum bei $t=0 \Leftrightarrow 0 = \tilde{\Phi}'_z(0) = 2z^T (A^T A x - A^T b)$.
Also $\Leftrightarrow A^T A x = A^T b$. Diese nennen wir die Normalengleichung.
Falls $\text{rang}(A) = n$ (voller Spaltenrang), so ist $C := A^T A$ SPD, also
regulär, womit die Normalengleichung eindeutig lösbar ist.
Somit ist in diesem Fall die NG sogar eine hinreichende
Bed. für das geg. Ausgleichsproblem.

Satz 6.13: (Eig. von Householder-Reflexionen)

Sei $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$, dann hat die Householder-Reflexion

$Q := I_m - \frac{2}{v^T v} v v^T$, folgende Eigenschaften

1) $Q^T = Q$, 2) $Q^2 = I_m$ 3) $Q^2 = I_m$ (Q ist involutorisch)

Geom. Geometrische Interpretation: Q ist Spiegelung
an der Hyperebene $(\text{span}\{v\})^\perp = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x^T v = 0\}$. Also
 $x \in H \Rightarrow Qx = x$ & x parallel zu $v \Rightarrow Qx = -x$

Algo 6.24 (Ausgleichsproblem mittels QR-Zerl.)

Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $n = \text{rang}(A)$, $b \in \mathbb{R}^m$

Output: Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ des Ausgleichsproblems $\min \|Ax - b\|_2$
für $k=1, \dots, \min\{n, m-1\}$ do

Bestimme Househ.-Reflex. $Q^{(k)}$, s.d. die letzten $m-k$
Einträge in der k -ten Spalte von $Q^{(k)} A$ Null sind

$A \leftarrow Q^{(k)} A$

$b \leftarrow Q^{(k)} b$

end for
Partitioniere $A = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Berechne $x = R^{-1} b_1$ mit Algo 2.2

$2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$ flops

Satz 6.3: Sei $m \geq n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ & $n = \text{rang}(A)$. Ein $x \in \mathbb{R}^n$
ist genau dann Lösung des Ausgleichsproblems ($p=q=2$)
wenn x die Normalengleichung erfüllt.

Algo 6.5 (Methode der Normalengleichung), A voller Spaltenrang

1) $C := A^T A$ [$m \times n$]

2) Berechne Cholesky-Faktor R (Algo 2.37) [$\frac{1}{3}n^3$] ($RA^T = C$)

3) $b' := A^T b$ [$2mn$]

4) Löse $R^T y = b'$ (Algo 2.1) [n^2]

5) Löse $Rx = y$ (Algo 2.2) [n^2]

Bem: NG haben Nachteil, da numerisch instabil, wenn
 $\kappa(A) \gg 1$. Bsp: $m=n$, $A = V_n$ Vandermondematrix, so ist
die NG (Algo 6.5) numerisch instabil & hat Rückwärtsfehler
in doppelter Genauigkeit wesentlich höher als 10^{-6} (vgl. Def.
num. Rückwärtsstabilität). Im Vergleich schneidet die
LU-Zerl. wesentlich besser ab ($\kappa(A^T A) = (\kappa(A))^2$)

Lemma 6.15: Sei $a \in \mathbb{R}^m$ & $0 \leq \alpha$ nicht kleiner als $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^m$
Sei $\alpha := \pm \|a\|_2$ ($\rightarrow$ in der Praxis $\alpha = -\text{sign}(a_1) \|a\|_2$).
Dann gilt für $v := a - \alpha e_1$, $Q = I_m - \frac{2}{v^T v} v v^T$: $Qa = \alpha e_1$

Algo 6.17 (QR-Zerlegung mittels Householder)

Input: Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Output: QR, s.d. $A = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$, Q ortho, $R = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$

$Q = I_m$

for $k=1, \dots, \min\{n, m-1\}$ do

Bestimme Househ.-Reflex. $Q^{(k)}$, s.d. die letzten $m-k$
Einträge in der k -ten Spalte von $Q^{(k)} A$ Null werden
(mit Lemma 6.15)

Überschreibe $A \leftarrow Q^{(k)} A$

Überschreibe $Q \leftarrow Q Q^{(k)}$

end for

Setze R als die ersten n Zeilen von A

MATLAB: (QR-Householder)

function [Q,R] = qr_householder(A)

[m,n] = size(A);

Q = eye(m);

for k=1:min(n,m-1)

alpha = -sign(A(k,k)) * norm(A(k:m,k),2);

v = A(k:m,k) - alpha * eye(m-k+1,1);

Qk = eye(m-k+1) - (2/(v'*v)) * (v*v');

A(k:m,k:n) = Qk * A(k:m,k:n);

Q = Q * blkdiag(eye(k-1), Qk);

end

R = A(1:n,:);

end